מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(2)	(4)	(2)	(2)	(2)	(2)	(4)	(4)	(2)	(4)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(3)	(2)	(4)	(3)	(3)	(3)	(1)	(1)	(1)	(4)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-9)

1. **השאלה**: במעגל סורטטו שני קטרים.

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון: כאשר נסרטט שני קטרים במעגל נוכל לראות כי שניהם יחצו זה את זה במרכז המעגל. כששני קווים נחתכים הם יוצרים שני זוגות של זוויות שוות (זוויות קודקודיות), לכן נקבל שני זוגות של זוויות מרכזיות שוות. מכיוון שמדובר בזוויות מרכזיות במעגל כל אחת תיצור גזרה במעגל, וכל זוג זווית שוות תיצורנה שתי גזרות שוות. לכן נקבל שני זוגות של גזרות שוות, שהן למעשה שני זוגות של חלקים השווים בשטחם.
נסביר את התשובות הלא-נכונות:

<u>תשובה (1)</u>: שני הקטרים חילקו את המעגל ל-4 חלקים שווים בשטחם

התשובה אינה נכונה, שכן שני הקטרים יחלקו את המעגל ל-4 חלקים שווים רק כאשר הם מאונכים זה לזה. כך יתקבלו 4 גזרות בהן הזווית המרכזית שווה ל-$90°$, ועל כן רק במצב כזה כל הגזרות שיתקבלו יהיו שוות בשטחן. מכיוון שהקטרים אינם בהכרח מאונכים זה לזה, הרי שהתשובה אינה נכונה.

<u>תשובה (3)</u>: הקטרים מאונכים זה לזה

התשובה אינה נכונה, שכן העברת שני קטרים במעל אינה מחייבת שהם יהיו מאונכים זה לזה. אין מניעה לצייר שני קטרים שאינם מאונכים זה לזה, כפי שהוסבר קודם לכן.

<u>תשובה (4)</u>: הקטרים מקבילים זה לזה

התשובה אינה נכונה, שכן שני קטרים יכולים להיות מקבילים זה לזה, רק כאשר שני הקטרים מתלכדים לכדי קוטר אחד. בכל מצב אחר, שני הקטרים חייבים לעבור במרכז המעגל, שכן אחרת הם לא יהוו קוטר, ועל כן שניהם בהכרח יחצו זה את זה. על פי ההגדרה של קווים מקבילים, קווים מקבילים לעולם לא ייפגשו.

תשובה (2).

סימולציה 8 - הסברים לפרק 5 - חשיבה כמותית

2. **השאלה**: נתון מלבן שאורכו גדול מרוחבו.
אורך המלבן הוא 5 ס״מ.

שטח המלבן (בסמ״ר) **אינו** יכול להיות –

פתרון: בדיקת תשובות

מכיוון ששטח המלבן שווה לאורך המלבן כפול רוחב המלבן, נוכל לחשב על פי אורך המלבן, השווה ל-5 ס״מ, והשטחים המוצעים בתשובות מהו רוחב המלבן. בצורה זו נוכל לבדוק באיזו תשובה רוחב המלבן **אינו** קצר יותר מאורך המלבן כפי שהוגדר בנתונים.

<u>תשובה (1)</u>: 5. אם שטח המלבן שווה ל-5 סמ״ר, הרי שרוחב של המלבן שווה ל-1 ס״מ $\left(=\frac{5}{5}\right)$. נתון כי רוחב המלבן קצר יותר מאורכו, ו-1 ס״מ אכן קצר יותר מ-5 ס״מ. מכאן שתשובה זו אפשרית.

<u>תשובה (2)</u>: 12. אם שטח המלבן שווה ל-12 סמ״ר, הרי שרוחב המלבן שווה ל- $2\frac{2}{5}$ ס״מ $\left(=\frac{12}{5}\right)$. נתון כי רוחב המלבן קצר יותר מאורכו. מכיוון ש- $2\frac{2}{5}$ ס״מ אכן קצר יותר מ-5 ס״מ, הרי שתשובה זו אפשרית.

<u>תשובה (3)</u>: 20. אם שטח המלבן שווה ל-20 סמ״ר, הרי שרוחב המלבן שווה ל-4 ס״מ $\left(=\frac{20}{5}\right)$. נתון כי רוחב המלבן קצר יותר מאורכו, ו-4 ס״מ אכן קצר יותר מ-5 ס״מ. מכאן שתשובה זו אפשרית.

מכיוון שפסלנו שלוש תשובות הרי שהתשובה הנכונה היא התשובה שנותרה, תשובה (4). תוכלו לשים לב כי אם תבדקו אותה תמצאו כי בתשובה זו רוחב המלבן ארוך יותר מאורכו, מה שסותר את נתוני השאלה, ומכאן שתשובה זו אינה אפשרית.

תשובה (4).

הערה: נתון כי אורך המלבן הוא 5 ס״מ וכי רוחבו קטן מאורכו, ומכאן שרוחבו קטן מ-5 ס״מ. אילו היה רוחב המלבן שווה לאורכו, הרי ששטחו של המלבן היה שווה ל-25 סמ״ר $(= 5 \cdot 5)$, מכאן שניתן לקבוע כי שטח המלבן אינו יכול להיות שווה או גדול מ-25 סמ״ר.

---

3. **השאלה**: חברת "WARM" גובה 5 שקלים ליום מהלקוחות המנויים על חבילת ערוצים א,
ו-8 שקלים מהלקוחות המנויים על חבילת ערוצים ב.
בחברה יש 140 לקוחות המנויים על חבילת ערוצים א.
הסכום היומי שהחברה גובה מכל לקוחותיה יחד הוא 2,300 שקלים.

כמה מלקוחות החברה מנויים על חבילת ערוצים ב?

פתרון: נתבקשנו למצוא כמה מלקוחות החברה מנויים לחבילת ערוצים ב׳, כאשר ידוע לנו כמה עולה חבילת ערוצים זו. מכאן שעל מנת למצוא כמה מהלקוחות מנויים על חבילת ערוצים ב׳, יש למצוא ראשית מהו הסכום הכולל אותו גובה החברה ממנויים אלה.
לחברה יש 140 מנויים על חבילת ערוצים א׳ והיא גובה מהם 5 שקלים ביום, ולפיכך הסכום הכולל אותו היא גובה מהם ביום שווה ל-700 שקלים $(= 140 \cdot 5)$. החברה גובה סכום כולל יומי של 2,300 שקלים מכל מנויי החברה, ומכאן שהיא גובה מבעלי חבילת ערוצים ב׳ 1,600 שקלים $(= 2300 - 700)$.

כל מנוי בחבילת ערוצים ב׳ משלם 8 שקלים ביום, ומכאן שלחברה יש בסך הכול 200 מנויים על חבילת ערוצים ב׳ $\left(=\frac{1600}{8}\right)$.

תשובה (2).

---

4. **השאלה**: צלעו של משולש שווה-שוקיים קצרה ב-3 ס״מ מהבסיס.
היקף המשולש הוא 36 ס״מ.

מה אורך הבסיס (בס״מ)?

פתרון: **<u>דרך א׳</u>**: בדיקת תשובות

נתבקשנו למצוא גורם מסוים (אורך בסיס המשולש), והתשובות המוצעות הן תשובות מספריות, ועל כן נוכל לבדוק את התשובות המוצעות. התשובה הנכונה היא זו שתתאם את הנתונים:

<u>תשובה (1)</u>: 12.5. נתון כי אורך צלע המשולש קצרה ב-3 ס״מ מאורך בסיסו, ומכאן שאם אורך הבסיס של המשולש שווה ל-12.5 ס״מ אז אורך צלעו של המשולש שווה ל-9.5 ס״מ $(= 12.5 - 3)$.

המשולש הנתון הוא משולש שווה שוקיים, ועל כן שתי צלעותיו שוות באורכן, ומכאן שהיקפו של משולש זה שווה ל-31.5 ס״מ $(= 12.5 + 9.5 + 9.5)$. נתון כי היקף המשולש שווה ל-36 ס״מ ועל כן זו אינה התשובה הנכונה.

<u>תשובה (2)</u>: 14. נתון כי אורך צלע המשולש קצרה ב-3 ס״מ מאורך בסיסו, ומכאן שאם אורך הבסיס שווה ל-14 ס״מ אז אורך כל צלע שווה ל-11 ס״מ $(= 14 - 3)$. המשולש הנתון הוא משולש שווה שוקיים, ועל כן שתי צלעותיו שוות באורכן, ומכאן שהיקפו של המשולש שווה ל-36 ס״מ $(= 14 + 11 + 11)$. נתון כי היקפו של המשולש שווה ל-36 ס״מ, ועל כן זו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב׳</u>: בניית משוואה

מכיוון שנשאלנו על אורך הבסיס במשולש נסמן אותו באמצעות נעלם:
נסמן כי אורך הבסיס במשולש שווה ל-x ס״מ.
על פי נתוני השאלה, אורך צלע המשולש קטנה ב-3 ס״מ מאורך הבסיס, ועל כן אורכה של כל צלע שווה ל-$(x - 3)$ ס״מ.
נתון כי היקף המשולש שווה ל-36 ס״מ כאשר ידוע כי שתי צלעותיו שוות זו לזו, ומכאן שנוכל לבנות את המשוואה הבאה: $x + (x - 3) + (x - 3) = 36$.
נפתח את הסוגריים ונכנס איברים, ונקבל: $3x - 6 = 36$.
נוסיף 6 לשני האגפים, ונקבל: $3x = 42$. נחלק את שני צדי המשוואה ב-3, ונקבל: $x = 14$.

תשובה (2).

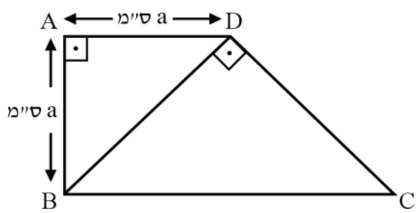
.5 **השאלה**: ריבוע חסום במעגל שרדיוסו R ס"מ.

מה אורכו של אלכסון הריבוע?

פתרון: ריבוע החסום במעגל הוא ריבוע אשר כל אחד מקודקודיו נמצא על היקף המעגל. אם נעביר אלכסון בתוך הריבוע, נמצא כי הזווית ההיקפית הנשענת על האלכסון היא זווית פנימית בריבוע, שהיא גם זווית היקפית במעגל, השווה ל-$90°$. במעגל זווית היקפית השווה ל-$90°$ היא זווית שנשענת על קוטר המעגל, ומכאן שאלכסון הריבוע הוא קוטר המעגל. מכאן שאורך האלכסון שווה לפעמיים רדיוס המעגל, כלומר ל-2R ס"מ.

תשובה (2).

.6 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם טרפז ABCD $(AD \parallel BC)$.



לפי נתון זה ונתוני הסרטוט,
$BC = ?$

פתרון: נתבקשנו למצוא את אורכה של הצלע BC.
משולש BAD, הוא משולש ישר זווית ושווה-שוקיים (משולש כסף). אורך היתר במשולש כסף גדול פי $\sqrt{2}$ מאורך הניצב, ומכאן שאורכו של BD, היתר במשולש BAD, שווה ל- $a\sqrt{2}$ ס"מ $\left(= \sqrt{2} \cdot a\right)$.

בנוסף, זוויות הבסיס במשולש כסף שוות ל-$45°$, ולכן $\angle ABD = \angle ADB = 45°$.
לפי נתוני השאלה ABCD הוא טרפז ועל כן הבסיס AD מקביל ל-BC, ומכאן: $\angle DBC = \angle ADB = 45°$ (זוויות Z בין ישרים מקבילים).
כעת נתבונן על משולש BDC בו נמצאת הצלע עליה נשאלנו, BC. זווית BDC שווה ל-$90°$, ונראה שזוויותיו שוות ל-$90°$, $45°$ ו-$45°$, ומכאן שמדובר במשולש כסף שבו $BD = a\sqrt{2}$. אורכו של היתר במשולש זה, כלומר הצלע BC, גדול פי $\sqrt{2}$ מאורכו של הניצב BD, ולפיכך נמצא כי BC שווה ל- 2a ס"מ $\left(= \sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}\right)$

תשובה (2).

.7 **השאלה**: מטילים קוביה הוגנת פעמיים.

מה ההסתברות לקבל בזריקה הראשונה תוצאה **קטנה** מ-4 ובזריקה השניה תוצאה **גדולה** מ-3?

פתרון: בשאלה מדובר על שני מאורעות, ועל כן ראשית נבדוק מה הסיכוי להתרחשותו של כל מאורע בנפרד.
על מנת לקבל בזריקה הראשונה תוצאה הקטנה מ-4 נוכל לקבל כל אחת משלוש האפשרויות - 1, 2 או 3, מתוך 6 האפשרויות בסך הכל בהטלת קוביה. מכאן שהסיכוי לקבל תוצאה הקטנה מ-4 שווה ל- $\frac{1}{2}$ $\left(= \frac{3}{6}\right)$.

על מנת לקבל בזריקה השנייה תוצאה הגדולה מ-3 נוכל לקבל כל אחת משלוש אפשרויות - 4, 5 או 6, מתוך 6 אפשרויות סך הכול הקיימות בהטלת קוביה. מכאן שהסיכוי לקבל תוצאה הגדולה מ-3 שווה ל- $\frac{1}{2}$ $\left(= \frac{3}{6}\right)$.

עלינו למצוא מהו הסיכוי לקבל בהטלה אחת תוצאה הקטנה מ-4 **וגם** בהטלה השנייה תוצאה הגדולה מ-3, ועל כן יש לכפול בין הסיכויים לקבלת שני המאורעות.

מצאנו כי הסיכוי לקבל תוצאה הקטנה מ-4 **וגם** תוצאה הגדולה מ-3 בשתי הטלות שווה ל- $\frac{1}{4}$ $\left(= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$.

תשובה (4).

---

8. **השאלה**: $x = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

איזה מהביטויים הבאים **אינו** שווה ל-x?

פתרון: בדיקת תשובות

בתשובות מופיעים מספרים שאינם ראשוניים, ועל כן ניתן לפרק אותם למכפלה של גורמים ראשוניים.
הביטוי הנתון לנו עבור x מורכב ממכפלה של מספרים ראשוניים. מכאן שעל מנת למצוא איזו תשובה אינה שווה ל-x נפרק גם את המספרים שבתשובות לגורמים הראשוניים המרכיבים אותם, ונראה איזו תשובה **אינה** שווה ל- $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

<u>תשובה (1)</u>: 30^2. נפרק את 30 למכפלת שני מספרים המרכיבים אותו $30^2 \leftarrow (6 \cdot 5)^2$. מכיוון ש-6 הוא מספר פריק, נפרק גם אותו למכפלת המספרים הראשוניים המרכיבים אותו, ונקבל: $(6 \cdot 5)^2 \leftarrow (2 \cdot 3 \cdot 5)^2$, הביטוי שקיבלנו אכן שווה ל- $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ ולכן שווה ל-x, ומכאן שזו אינה התשובה הנכונה.

<u>תשובה (2)</u>: $6^2 \cdot 25$. נפרק שני המספרים הפריקים 6 ו-25 למכפלת המספרים הראשוניים המרכיבים אותם, ונקבל: $(2 \cdot 3)^2 \cdot 5^2$, הביטוי שקיבלנו שווה ל- $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ ולכן שווה ל-x, ומכאן שזו אינה התשובה הנכונה.

<u>תשובה (3)</u>: $4 \cdot 15^2$. נפרק את המספרים הפריקים 4 ו-15 למכפלת המספרים הראשוניים המרכיבים אותם, ונקבל: $4 \cdot 15^2 \leftarrow 2^2 \cdot (3 \cdot 5)^2$, הביטוי שווה ל- $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ ולכן שווה ל-x, ומכאן שזו אינה התשובה הנכונה.

פסלנו שלוש תשובות, תשובות (1), (2) ו-(3), ולכן התשובה הנכונה היא תשובה (4).
מפירוק המספר הפריק שבתשובה (4), 12, לא נקבל ביטוי הזהה לביטוי הנתון.

תשובה (4).

---

9. **השאלה**: מוטי ושניים מחבריו אכלו יחדיו במסעדה ושילמו בסך הכול 600 שקלים.

מוטי שילם יותר **מכל אחד** מהחברים.

אם מוטי שילם מספר שלם של שקלים,
כמה שקלים, לכל הפחות, שילם מוטי?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: בדיקת תשובות

עלינו למצוא כמה שילם מוטי **לכל הפחות** ועל כן נבדוק קודם את התשובות בהן המספר המופיע הוא הכי קטן, וכך התשובה הראשונה הקטנה ביותר שתתאים היא התשובה הנכונה.

<u>תשובה (1)</u>: 200. אם מוטי שילם 200 שקלים, הרי שהסכום שנותר לשני חבריו לשלם הוא 400 שקלים $(600 - 200 =)$. במצב כזה לא ייתכן שמוטי יהיה זה שישלם את הסכום הגדול ביותר. שכן אם הסכום שנותר לשני חבריו לשלם יתחלק ביניהם שווה בשווה, כל אחד מהם ישלם סכום של 200 שקלים $\left(\frac{400}{2} =\right)$ שזהו הסכום ששילם מוטי, ואם הסכום לא יתחלק באופן שווה הרי שבהכרח אחד מהם ישלם יותר מ-200 והשני פחות מ-200, כך שמוטי לא יהיה זה ששילם יותר מכל אחד מחבריו. מכאן שזו אינה התשובה הנכונה.

סימולציה 8 - הסברים לפרק 5 - חשיבה כמותית

<u>תשובה (2)</u>: 201. אם מוטי שילם 201 שקלים, הרי שהסכום שנותר לשני חבריו לשלם הוא 399 שקלים $(=600-201)$. במצב כזה ייתכן כי אחד מחבריו של מוטי שילם 200 שקלים והשני שילם 199 שקלים $(=399-200)$ ובכך מוטי, אשר שילם 201 שקלים, שילם יותר מכל אחד מחבריו.

מכיוון שמצאנו מצב בו שמוטי שילם יותר מכל אחד מחבריו, כלומר, מצאנו את הסכום ה**מינימלי** שמוטי יכול לשלם ולקיים את נתוני השאלה, ולפיכך זו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: הבנה אלגברית

זוהי שאלת טווחים ובה נתבקשנו למצוא כמה שילם מוטי לכל הפחות. בשאלה כזו, עלינו למצוא את המצב הקיצוני ביותר, ובמקרה הנתון, הקטן ביותר. ידוע כי שלושת החברים שילמו 600 שקלים בסך הכול, ומכאן שאם כולם שילמו סכום זהה הרי שכל אחד מהם שילם 200 שקלים $\left(=\frac{600}{3}\right)$. מכיוון שנתון כי מוטי שילם יותר מכל אחד מחבריו הרי שעליו לשלם לכל הפחות, את הסכום הקטן ביותר הגדול מ-200 שקלים. כמו כן, מכיוון שמוטי שילם מספר שלם של שקלים, הרי שמוטי שילם 201 שקלים **לכל הפחות**.

תשובה (2).

הסקה מתרשים (שאלות 10-14)

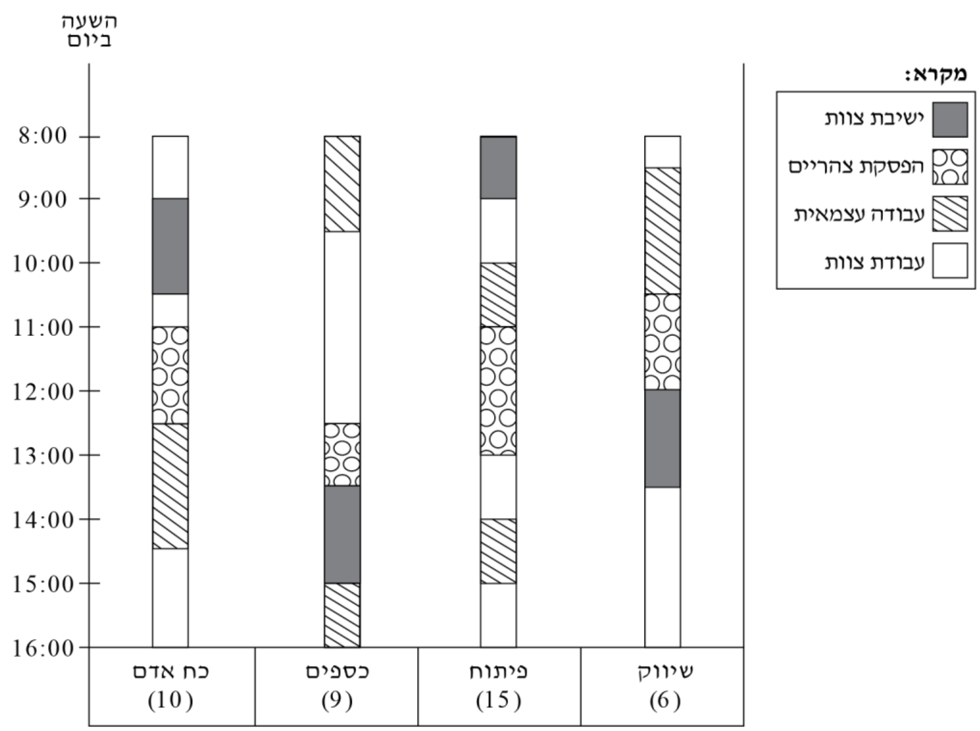
עיינו היטב בתרשים שלפניכם וענו על חמש השאלות שלאחריו.

לפניכם תרשים המתאר את סדר היום של העובדים בארבע מחלקות של חברה מסוימת: מחלקת השיווק, מחלקת הפיתוח, מחלקת כספים ומחלקת כח האדם. המספרים המצוינים בסוגריים מתחת לשם כל אחת מהמחלקות מציינים את כמות העובדים באותה המחלקה.

בכל מחלקה עוסקים בארבעה סוגי פעילויות במהלך היום: ישיבות צוות, הפסקת צהריים, עבודה עצמית ועבודת צוות (ראו מקרא).

בציר האנכי מצוינות שעות העבודה וכל עמודה מתארת באלו שעות עוסקים בכל אחת מהפעילויות בכל מחלקה.

לדוגמה: במחלקת הפיתוח ישנם 15 עובדים העוסקים בעבודה עצמית בין השעות 10:00-11:00 ובין השעות 14:00-15:00.



שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה, התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

10. **השאלה**: כמה מעובדי החברה עובדים כמות שעות זהה לפני ארוחת הצהריים ולאחריה?

פתרון: נעבור על ארבע המחלקות השונות ונבדוק, על סמך לוח הזמנים בציר האנכי, באלו מחלקות העובדים עובדים מספר שעות זהה לפני ואחרי ארוחת הצהריים.

<u>מחלקת כח אדם</u>: במחלקה זו עובדים 3 שעות לפני ארוחת הצהריים (08:00-11:00), ו-3 שעות וחצי אחרי ארוחת הצהריים (12:30-16:00), כלומר **לא** עובדים מספר שעות זהה לפני ואחרי ארוחת הצהריים.

<u>מחלקת כספים</u>: עובדים 4 שעות וחצי לפני ארוחת הצהריים (08:00-12:30), ושעתיים וחצי אחרי ארוחת הצהריים (13:30-16:00), כלומר **לא** עובדים מספר שעות זהה לפני ואחרי ארוחת הצהריים.

<u>מחלקת פיתוח</u>: עובדים 3 שעות לפני ארוחת הצהריים (08:00-11:00), ו-3 שעות אחרי ארוחת הצהריים (13:00-16:00), כלומר עובדים מספר שעות זהה לפני ואחרי ארוחת הצהריים.

מחלקת שיווק: עובדים שעתיים וחצי לפני ארוחת הצהריים (08:00-10:30), ו-4 שעות אחרי ארוחת הצהריים (12:00-16:00), כלומר הם **לא** עובדים מספר שעות זהה לפני ואחרי ארוחת הצהריים.

מצאנו שמחלקת הפיתוח, המונה 15 עובדים, היא המחלקה היחידה שעובדת מספר שעות זהה לפני ואחרי ארוחת הצהריים, ומכאן שישנם 15 עובדים שעובדים מספר שעות זהה לפני ואחרי ארוחת הצהריים.

תשובה (4).

---

11. **השאלה**: בכמה מהמחלקות היום מתחיל ומסתיים באותו סוג של פעילות?

פתרון: נעבור על ארבע המחלקות השונות ונבחן איזו פעילות נעשית בהן בתחילת היום ובסוף היום:

מחלקת כח אדם: מתחילה את היום בעבודת צוות, ומסיימת את היום בעבודת צוות. כלומר המחלקה מבצעת אותו סוג של פעילות בתחילת היום ובסופו.

מחלקת כספים: מתחילה את היום בעבודה עצמאית, ומסיימת את היום בעבודה עצמאית. כלומר המחלקה מבצעת אותו סוג של פעילות בתחילת היום ובסופו.

מחלקת פיתוח: מתחילה את היום בישיבת צוות, ומסיימת את היום בעבודת צוות. כלומר המחלקה אינה מבצעת אותו סוג של פעילות בתחילת היום ובסופו.

מחלקת שיווק: מתחילה את היום בעבודת צוות, ומסיימת את היום בעבודת צוות. כלומר המחלקה מבצעת אותו סוג של פעילות בתחילת היום ובסופו.

מכאן שיש 3 מהמחלקות - מחלקת כח אדם, מחלקת כספים ומחלקת שיווק - מתחילות ומסיימות את היום באותה פעילות.

תשובה (3).

---

12. **השאלה**: החברה החליטה לסגור את מחלקת הכספים ולחלק את עובדיה שווה בשווה בין המחלקות הנותרות.

בכמה אחוזים גדל מספר העובדים במחלקת הפיתוח?

פתרון: ראשית נמצא כמה עובדים חדשים נוספו למחלקת הפיתוח. מכיוון שמחלקת הכספים מנתה 9 עובדים אשר כעת יתחלקו שווה בשווה בין 3 המחלקות שנותרו, הרי שנוספו לכל מחלקה 3 עובדים $\left(=\frac{9}{3}\right)$.

במחלקת הפיתוח היו 15 עובדים, ומכאן שתוספת של 3 עובדים מהווה תוספת של $\frac{1}{5}$ $\left(=\frac{3}{15}\right)$ שהם 20% $\left(=\frac{1}{5}\cdot 100\right)$. מצאנו כי הוספה של 3 עובדים למחלקת הפיתוח הגדילה את מספר העובדים במחלקה ב-20%.

תשובה (2).

---

13. **השאלה**: ישיבת הצוות של מחלקת כח האדם הוקדמה לשעה 8:00.

כיצד יראה התרשים המתוקן של מחלקה זו?

פתרון: נתבונן בתרשים של מחלקת כוח אדם לפני השינוי ונראה כי ישיבת הצוות אמורה להתחיל בשעה 9 ואורכה הוא שעה וחצי (09:00-10:30). מכיוון שישיבת הצוות הוקדמה לשעה 08:00, נצפה כי התרשים המתוקן של מחלקה זו ייפתח בישיבת צוות של שעה וחצי (מכאן שתשובות (2) ו-(3) נפסלות).
בנוסף, ניתן לראות כי בעקבות הקדמת ישיבת הצוות לשעה 08:00, שעת <u>עבודת הצוות</u> שהייתה בתרשים המקורי לפני ישיבת הצוות (08:00-09:00) נדחית לאחר ישיבת הצוות, כלומר תתחיל בשעה 9:30, ותתאחד עם מחצית השעה של עבודת הצוות שהייתה מלכתחילה בין השעות 10:30-11:00. התרשים בו מופיעה שעה וחצי של <u>ישיבת צוות</u> ולאחריה שעה וחצי של <u>עבודת צוות</u> הוא התרשים המופיע בתשובה (4).

תשובה (4).

---

14. **השאלה**: ידוע כי העובדים מבלים את הפסקת הצהריים שלהם בחדר האוכל, וכי חדר האוכל פתוח רק כאשר נמצאים בו עובדים.

כמה שעות ביום חדר האוכל פתוח?

פתרון: על פי התרשים, מחלקת השיווק היא המחלקה הראשונה שיוצאת להפסקת צהריים בשעה 10:30. בהמשך ניתן לראות כי חלק מזמני ארוחת הצהריים של המחלקות חופפים כך שתמיד יש מחלקה כלשהי בהפסקה, כאשר המחלקה שחוזרת אחרונה מהפסקת הצהריים היא מחלקת כספים בשעה 13:30. מכיוון שחדר האוכל פתוח רק כאשר העובדים נמצאים בו בזמן הפסקת הצהריים, הרי שהוא פתוח במשך 3 שעות בין השעות 10:30-13:30.

תשובה (3).

שאלות ובעיות (שאלות 15-20)

15. **השאלה**: נתון: $0 < x\ ,\ y$

$$z = \frac{x}{2x+y} = \frac{y}{2y+x}$$

$$z = ?$$

הפתרון: <u>**דרך א'**</u>: הצבת מספרים

בשאלה נתונה מערכת משוואות, כאשר לא נשאלנו לגבי ערכם של x ו-y ולכן נוכל להציב מספרים במקום x ו-y. חשוב לשים לב שמכיוון שבשאלה נתונה משוואה עלינו להציב מספרים אשר מקיימים אותה. נציב מספרים המקיימים את המשוואה: $\frac{x}{2x+y} = \frac{y}{2y+x}$. נציב כי $x = y = 1$ ונראה כי המשוואה נכונה:

$$\frac{1}{2\cdot1+1} = \frac{1}{2\cdot1+1} \Leftarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

נתון כי z שווה לכל אחד מהביטויים הללו בנפרד, כך שלמעשה קיבלנו שלאחר ההצבה z שווה ל- $\frac{1}{3}$.

בכל התשובות המוצעות מופיעים מספרים בלבד, ועל כן ניתן לראות כי תשובה (3) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: פישוט אלגברי

ראשית נמצא את הקשר בין x ו-y בעזרת פישוט המשוואה: $\frac{x}{2x+y}=\frac{y}{2y+x}$.

נכפיל את שני צדי המשוואה ב- $(2x+y)(2y+x)$, ונקבל: $x\cdot(2y+x)=y\cdot(2x+y)$.

נפתח את הסוגריים, ונקבל: $2xy+x^2=2xy+y^2$.

נחסר 2xy משני צידי המשוואה, ונקבל: $x^2=y^2$.

בדרך כלל למשוואה ריבועית מסוג זה יש שני פתרונות, אולם מכיוון שנתון כי x ו-y חיוביים, הרי שהפתרון שלפיו מדובר במספרים נגדיים אינו יכול להתקיים, והפתרון היחיד הוא כי: $x=y$.

כעת כשמצאנו ש-x שווה ל-y ניתן להחליף את x ב-y במשוואה: $z=\frac{x}{2x+y}$.

נציב כי $x=y$, ונקבל: $z=\frac{x}{2x+x}$ ⇦ $z=\frac{x}{3x}$ ⇦ $z=\frac{1}{3}$.

תשובה (3).

---

16. **השאלה**: באיזה מהמקרים הבאים יהיה הביטוי: ax^3+bx^2+cx+d גדול מ-0 **לכל x**?

פתרון: בדיקת תשובות והצבת מספרים

נבצע הצבת מספרים על פי התשובות השונות ונראה באיזו תשובה הביטוי ax^3+bx^2+cx+d יהיה חיובי לכל x:

<u>תשובה (1)</u>: $0<a,b,c,d$. נציב מספרים המקיימים את התנאי שבתשובה: $a=b=c=d=1$, ונקבל כעת כי הביטוי עליו נשאלנו שווה ל: $1\cdot(x^3)+1\cdot(x^2)+1\cdot(x)+1$.

נראה שכאשר $x=-1$ הביטוי שווה ל: $1\cdot(-1)^3+1\cdot(-1)^2+1\cdot(-1)+1$ ⇦ $-1+1-1+1$ ⇦ 0. 0 אינו ביטוי חיובי. מכיוון שמצאנו כי הביטוי אינו חיובי לכל x, הרי שהתשובה אינה נכונה.

<u>תשובה (2)</u>: $d<c<b<a$. נציב מספרים המקיימים את התנאי שבתשובה: $a=4$, $b=3$, $c=2$ ו- $d=1$, ונקבל כי הביטוי עליו נשאלנו שווה ל: $4\cdot(x^3)+3\cdot(x^2)+2\cdot(x)+1$.

נראה שכאשר $x=-1$ הביטוי שווה ל: $4\cdot(-1)+3\cdot(1)+2\cdot(-1)+1$ ⇦ $-4+3-2+1$ ⇦ -2. מצאנו כי הביטוי אינו חיובי לכל x ומכאן שהתשובה אינה נכונה.

<u>תשובה (3)</u>: $a,c=0$ וגם $0<b,d$. נציב מספרים המקיימים את התנאי שבתשובה: $a=c=0$ ו- $b=d=1$, ונקבל כי הביטוי עליו נשאלנו שווה ל: $0\cdot x^3+1\cdot x^2+0\cdot x+1$ ⇦ x^2+1.

ניתן לראות כי הביטוי שקיבלנו יהיה חיובי עבור כל x, שכן כל מספר בחזקה זוגית חיובי בהכרח והוספה של מספר חיובי, כלומר 1, הופכת אותו לחיובי יותר. על כן התשובה מתאימה.

<u>תשובה (4)</u>: $0<a,c$ וגם $b<a$ וגם $d<c$. נציב מספרים המקיימים את התנאי שבתשובה: $a=c=2$ ו- $b=d=1$, ונקבל כי הביטוי עליו נשאלנו שווה ל: $2\cdot(x^3)+1\cdot(x^2)+2\cdot(x)+1$.

נראה שכאשר $x=-1$ נקבל כי הביטוי שווה ל: $2\cdot(-1)+1\cdot(1)+2\cdot(-1)+1$ ⇦ $-2+1-2+1$ ⇦ -2. מצאנו כי הביטוי אינו חיובי לכל x ומכאן שהתשובה אינה נכונה.

מכיוון שפסלנו שלוש תשובות הרי שתשובה (3) היא התשובה הנכונה.

הערה: זוהי שאלת חיובי-שלילי בה נתבקשנו למצוא מתי הביטוי **חיובי** לכל x. בשאלות מסוג זה נוכל לפתור את השאלה בעזרת הבנה אלגברית. ידוע כי כל מספר בחזקה זוגית תמיד חיובי או שווה ל-0. לפיכך x^2 חיובי תמיד לכל x השונה מ-0. על מנת שכל הביטוי יהיה חיובי יש לוודא שהמקדם של x^2 חיובי, וכן לבדוק מה קורה כאשר x בחזקה אי-זוגית.

ניתן לראות כי על פי המידע שבתשובה (3) המקדמים של x שבחזקה אי-זוגית (a ו-c) שווים ל-0, כך שבביטוי

נשאר רק עם נעלם בחזקה זוגית - x^2. במצב כזה x^2 חיובי או שווה ל-0. כאשר גם המקדם של x^2 חיובי, הביטוי $b \cdot x^2$ עדיין חיובי או שווה ל-0. כאשר נוסיף לביטוי זה את הנעלם d, שנתון כי הוא חיובי, הרי שהביטוי שנקבל יהיה חיובי לכל x.

תשובה (3).

---

17. **השאלה**: פאותיה של קובייה הוגנת ממוספרות בספרות 1 עד 6.
צדיו של מטבע הוגן ממוספרים בספרות 1 ו-2.

אביטל מטילה את הקובייה ואת המטבע.

מה ההסתברות ששניהם יפלו על אותה ספרה?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: חישוב ההסתברות של כל מאורע בנפרד

נניח שאביטל זרקה קודם כל את המטבע. כדי שלאחר הטלת המטבע נקבל תוצאה זהה בקובייה אין זה משנה על איזה צד הוא ייפול, שכן כל המספרים המופיעים על גבי המטבע מופיעים גם בקובייה. לכן הסיכוי שנקבל 1 או 2 מהטלת המטבע שווה ל-1 $\left(=\frac{2}{2}\right)$.

כעת כשאביטל מטילה את הקובייה, נרצה שהיא תיפול בדיוק על אותו המספר שיצא מהטלת המטבע, כלומר על מספר אחד מסוים מתוך שישה מספרים אפשריים, ולכן הסיכוי שנקבל את אותו תוצאה מהטלת הקובייה שווה ל- $\frac{1}{6}$.

עלינו למצוא מה הסיכוי לקבל אותו מספר בהטלת המטבע **וגם** את אותו מספר בהטלת הקובייה ועל כן נכפול בין ההסתברויות של שני המאורעות, ונקבל כי ההסתברות שווה ל- $\frac{1}{6}$ $\left(=1 \cdot \frac{1}{6}\right)$.

<u>דרך ב'</u>: חישוב בעזרת צירופים

ראשית נמצא כמה צירופים בסך הכול ניתן לקבל מהטלה של מטבע וקובייה. בהטלת הקובייה ניתן לקבל 6 תוצאות שונות, ובהטלת המטבע ניתן לקבל 2 תוצאות שונות. מכאן שבהטלת קובייה ומטבע מספר הצירופים השונים שניתן לקבל שווה ל-12 $(= 2 \cdot 6)$.

כעת נמצא כמה אפשרויות "טובות" ישנן. תרחיש אחד שמתאים לנו הוא כאשר נקבל 1 במטבע ו-1 בקובייה, ובתרחיש שני נקבל 2 במטבע ו-2 בקובייה, כלומר בסך הכול ישנם שני תרחישים בהם נקבל את אותה תוצאה במטבע ובקובייה. מכאן שהסיכוי לקבל אותה תוצאה בהטלת מטבע וקובייה שווה ל- $\frac{1}{6}$ $\left(=\frac{2}{12}\right)$.

תשובה (1).

---

18. **השאלה**: נתון: $x \cdot y < 0$

$x + y < 0$

$x^2 - y^2 < 0$

איזה מהביטויים הבאים הוא **הקטן** ביותר?

פתרון: הצבת דוגמא מספרית

לא נשאלנו על ערכם של x ו-y ולכן נוכל להחליפם במספרים המקיימים את נתוני השאלה. בכדי להציב מספרים המקיימים את הנתונים בצורה יעילה, נשתמש בידע שלנו לגבי מספרים חיוביים ושליליים.
ראשית נראה כי נתון ש: $x \cdot y < 0$. כאשר המכפלה של x ו-y קטנה מ-0, אחד מהנעלמים צריך להיות חיובי והאחר צריך להיות שלילי.
בנוסף, נתון כי $x + y < 0$. על מנת שהסכום של שני נעלמים יהיה שלילי, המספר השלילי מבין השניים חייב להיות גדול יותר בערכו המוחלט מהמספר החיובי.
כמו כן, נתון כי: $x^2 - y^2 < 0$. נעביר אגפים, ונקבל: $x^2 < y^2$. במצב בו שני הנעלמים בחזקה ריבועית שניהם חיוביים ומכאן ניתן להסיק כי ערכו המוחלט של y גדול מערכו המוחלט של x. מכאן גם נוכל להסיק כי y הוא המספר השלילי ו-x הוא החיובי, ועל כן נוכל להציב כי: $x = 1$ ו- $y = -2$.
דרך נוספת למצוא מספרים המקיימים את הנתונים היא בעזרת ניסוי ותהייה.

לאחר שמצאנו מספרים המקיימים את שלושת הנתונים, נציב אותם בביטויים בתשובות ונראה באיזו תשובה אנו מקבלים את <u>המספר הקטן ביותר</u>:

<u>תשובה (1)</u>: y. נציב כי $y = -2$ ונקבל: -2.

<u>תשובה (2)</u>: x. נציב כי $x = 1$ ונקבל: 1. ערכה של תשובה (1) קטן מערכה של תשובה זו ועל כן תשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $x - y$. נציב כי $x = 1$ ו- $y = -2$, ונקבל: $1 - (-2)$ ⇦ $1+2$ ⇦ 3. ערכה של תשובה (1) קטן מערכה של תשובה זו ועל כן תשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: $y^2 - x^2$. נציב כי $x = 1$ ו- $y = -2$, ונקבל: $(-2)^2 - (1)^2$ ⇦ $4 - 1$ ⇦ 3. ערכה של תשובה (1) קטן מערכה של תשובה זו ועל כן תשובה זו נפסלת.

לאחר הצבת המספרים בתשובות, מצאנו כי הביטוי הקטן ביותר הוא זה שמופיע בתשובה מספר (1).

תשובה (1).

---

19. **השאלה**: זחל נמצא ביום ראשון ב-8:00 בבוקר בנקודה A על מסלול מעגלי שרדיוסו $\frac{2}{\pi}$ מטרים.

הזחל מתקדם עם כיוון השעון במהירות קבועה של 3 מטרים ביממה.

הזחל יימצא שוב בנקודה A ב-8:00 בבוקר ביום _____ באותו שבוע.

פתרון: ראשית עלינו למצוא מה אורכו של המסלול המעגלי עליו זוחל הזחל, כאשר אורך המסלול שווה לאורך היקף המעגל. נתון כי רדיוס המסלול המעגלי שווה ל- $\frac{2}{\pi}$ מטרים, ומכאן שאורך המסלול שווה ל-4 מטרים $\left(2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{\pi} =\right)$. מכאן שאם הזחל עובר 3 מטרים ביום ואורך המסלול עליו הוא מתקדם שווה ל-4 מטרים, אז בכל יום עובר הזחל $\frac{3}{4}$ מהמסלול. היום בו הזחל יגיע שוב לנקודה A בדיוק ב-08:00 בבוקר, יהיה היום בו הוא ישלים מספר שלם של סיבובים. בעזרת ספירה ידנית נמצא איזה חלק מהמעגל

עובר הזחל בכל יום:

ביום שני ב-08:00 בבוקר הזחל עבר $\frac{3}{4}$ מהמסלול.

ביום שלישי ב-08:00 הזחל הקיף את המסלול פעם וחצי $\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}=1\frac{1}{2}\right)$.

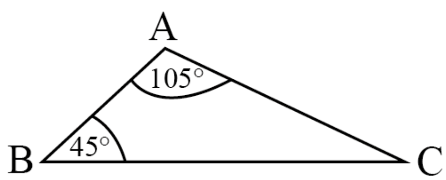
ביום רביעי ב-08:00 הזחל הקיף את המסלול פעמיים ורבע $\left(1\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=2\frac{1}{4}\right)$.

ביום חמישי ב-08:00 הזחל הקיף את המסלול בדיוק 3 פעמים $\left(2\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=3\right)$ ומכאן שביום זה הוא נמצא שוב בדיוק בנקודה A.

תשובה (1).

---

20. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם משולש ABC.



לפי נתון זה, ונתוני הסרטוט,

$$\frac{AC}{AB}=?$$

פתרון: אנו נשאלים על היחס בין שתי צלעות במשולש. מכיוון שבשאלה לא נתונים אורכי הצלעות, הדרך היחידה למצוא יחס בין צלעות היא בעזרת היחסים הקבועים שבמשולשים מיוחדים, או בעזרת דימיון משולשים.

המשולש המופיע בסרטוט אמנם אינו משולש מיוחד, אולם זווית $\angle ABC$ שווה ל-45°, מה שמרמז שעלינו לעבוד עם היחסים הידועים במשולשים מיוחדים.

אם נוריד גובה AD לצלע BC, נקבל שני משולשים ישרי זווית: משולש ABD, שהוא משולש כסף, ומשולש ADC

כדי למצוא את היחס בין הצלע AB לצלע AC, עלינו לראות באיזה משולש מיוחד נמצאת הצלע AC. ידוע כי $\angle BAC=105°$, ומצאנו כי $\angle BAD=45°$, ומכאן שזווית $\angle DAC$, שנוצרה מהורדת הגובה, שווה ל-60° $\left(105°-45°=\right)$. לפיכך משולש ADC הוא משולש זהב.

כעת ניתן לראות שלשני המשולשים המיוחדים שמצאנו יש צלע משותפת AD. שנוכל להשתמש בה על מנת למצוא את היחס בין אורכי הצלעות AC ו-AB. מכיוון שלא נשאלנו על גודלן של הצלעות נוכל להציב מספרים. נציב כי $AD=1$.

נתבונן במשולש ABD:

במשולש זה הצלע AD משמשת כניצב, כאשר המשולש הוא משולש כסף. במשולש כסף היתר גדול פי $\sqrt{2}$ מהניצב, ומכאן כי $AB=\sqrt{2}$ $\left(1\cdot\sqrt{2}=\right)$.

נתבונן במשולש ADC:

במשולש זה הצלע AD משמשת כניצב מול הזווית השווה ל-30°. במשולש זהב היתר גדול פי 2 מהניצב שנמצא מול הזווית השווה ל-30°. מכאן, שעל פי יחסי הצלעות במשולש זהב, $AC=2$ $\left(1\cdot 2=\right)$.

מצאנו כי $AB=\sqrt{2}$ ו- $AC=2$, ומכאן שהיחס בין AC ל-AB שווה ל- $\sqrt{2}$ $\left(\frac{AC}{AB}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\right)$.

תשובה (4).
